

## Fördern im Mathematikunterricht – aber wie?

Lernschwache Schüler/-innen sollten im Mathematikunterricht nach der Schwere ihrer Wissenslücken auf drei Stufen gefördert werden: im normalen Klassenunterricht, in Kleingruppen und bei Bedarf auch individuell. Bei der Aneignung neuer Inhalte ist es wichtig, eine Überlastung des Arbeitsgedächtnisses zu vermeiden. Dazu helfen gute Erklärungen, Lösungsbeispiele und Visualisierungen. Später im Lernprozess werden zunehmend aktives Erkunden und Anwenden des Gelernten wichtig.

### Einleitung

Mathematik aktiv entdecken lassen anstelle eines Unterrichts, der erklärt, mechanisch und kästchenweise übt, kleinschrittig Inhalte linear aufbaut (vgl. Wittmann 1993) – das ist die Methode, die von Konstruktivisten vertreten wird. Auswirkungen dieser Methode habe ich während eines Praktikums in einer Reformschule erlebt, wo ein Lehrer sich weigerte, seinen Schülern in Mathematik irgendetwas im Vorhinein zu erklären. Nur wenn sich die Schüler mit einer Frage an den Lehrer wandten, war er bereit, erklärende Hinweise zu geben. Seine Klasse wurde während des Praktikums zunehmend kleiner, weil die Eltern mit dem Lernfortschritt ihrer Kinder unzufrieden waren.

Sicherlich ist Eigenaktivität, Argumentieren, Begründen und selbstständiges Problemlösen wichtig. Aber eine große Anzahl kognitionspsychologischer Untersuchungen belegen, dass beim Erwerb komplexen Wissens Steuerung und massive Hilfestellungen, z. B. durch Lösungsbeispiele, unverzichtbar sind. Es geht also nicht um völlige Offenheit, sondern um ein „gesundes ausgeglichenes Verhältnis von Offenheit und Steuerung“ (vom Hofe 2001, S. 8; vgl. auch Kirschner et al. 2006; Reiss et al. 2008). Lange Zeit war es verpönt, davon zu sprechen, dass Lernprozesse durch systematisches Strukturieren und adaptives Erklären anhand von Lösungsbeispielen angeleitet werden (vgl. Wellenreuther 1987, Lorenz 1987). Diese Fehlorientierung ging zu Lasten lernschwacher Schüler. *Grünke* (2007, 17) führt dazu aus: „Aus all den vorliegenden Befunden zur effektiven Förderung von Kindern mit Leistungsschwächen ergibt sich, dass im Hinblick auf die allermeisten Lernziele ein eher lehrergesteuertes und gut geplantes Vorgehen angebracht ist, bei dem die Inhalte oder die Strategien explizit, schrittweise und mit vielen Redundanzen vermittelt werden... Werden [Kinder mit Lernschwierigkeiten] nun in einer verhältnismäßig offenen und freien Lernsituation mit Anforderungen konfrontiert,

in denen genau diese Qualifikationen gefragt sind, fühlen sie sich zwangsläufig überfordert.“

### Die adaptive Förderung lernschwacher Schüler/-innen

Lernschwache Schüler/-innen lernen nach den gleichen Gesetzmäßigkeiten wie „normale“, auch wenn möglicherweise ihre Arbeitsgedächtniskapazität geringer ist. Ein mechanisches Üben ohne die Herausarbeitung der Erklärungen, ohne Betonung der Zusammenhänge, führt gerade bei diesen Schülern zu einer Verfestigung ihrer Schwierigkeiten. Im Unterschied zum „normalen“ Schüler haben sie Kenntnis- und Verständnislücken, die das Lernen neuer hierarchisch aufeinander aufbauender Konzepte und Operationen erschweren. So setzt das Lernen halbschriftlicher und schriftlicher Rechenverfahren ein sicheres und müheloses Abrufen von Eins-Plus-Eins-Fakten sowie von Einmaleinsfakten voraus. Wenn das Kind sich aber noch auf der Stufe des Abzählens mit Hilfe seiner Finger bewegt, kann es diese komplexeren Verfahren nicht erlernen. Nach *Schipper* (2005, 56) sollte, um ein Großteil der derzeit entstehenden Lernschwierigkeiten zu vermeiden, ein „guter, präventiver Mathematikunterricht“ von der ersten Klasse an durchgeführt werden.

Ein zentrales Ziel des Unterrichts muss darin bestehen, Kenntnislücken zu identifizieren und adaptiv möglichst frühzeitig darauf zu reagieren. Dem Umfang der Kenntnislücken entsprechend können drei verschiedene Stufen der Förderung unterschieden werden (vgl. Wellenreuther 2009 a):

- 1. Stufe: Hierzu gehören alle Fördermaßnahmen, die im Rahmen des normalen Unterrichts möglich sind.
- 2. Stufe: Bei größeren Lernschwierigkeiten können Schüler Förderunterricht in kleinen Gruppen mit dem Ziel erhalten, dem normalen Unterricht folgen zu können. Besonders effizient ist es auf dieser Stufe, Mitschüler als Tutoren einzusetzen (vgl. Fuchs et al. 2008).

3. Stufe: Bei massiven Leistungsschwierigkeiten und Lernstörungen sollte auf dieser Stufe eine individuelle Förderung durch Förderlehrer erfolgen. Solche Rechenstörungen, die am besten individuell therapiert werden können, sind bei etwa 4 bis 5 % der Schüler anzutreffen (vgl. Schipper 2005, 23).

Um frühzeitig Lernschwierigkeiten und Lernstörungen zu erkennen, sollten routinemäßig – z. B. im Kindergarten, am Ende des ersten und des fünften Schuljahres – sorgfältig entwickelte und validierte Tests durchgeführt werden. Für diesen Zweck müssten allerdings noch Gruppentests entwickelt werden (gute Tests wie der Osnabrücker Test zur Zahlentwicklung sind leider nur als Einzeltests mit 30 Minuten Testzeit pro Schüler durchführbar (Schipper 2005, 28). Statt alle Schüler/-innen mit Hilfe eines solchen Verfahrens zu testen, sollte man sich aus Gründen der Praktikabilität je nach Leistungsniveau der Klasse auf die untere Hälfte bzw. das untere Viertel beschränken. Wenn solche Tests routinemäßig eingesetzt und darauf bezogen Fördermaßnahmen eingeleitet würden, könnten viele über mehrere Jahre sich erstreckende massive Misserfolgserfahrungen dieser Kinder vermieden werden.

Über die Praxis des Förderunterrichts (Stufe 2) in Deutschland schreibt Schipper (2005, 13): „Statt die Probleme des Kindes zu diagnostizieren und Aufgaben so auszuwählen, dass Kinder an ihre Kompetenzen anknüpfen und Fortschritte machen können, werden im Förderunterricht immer noch viel zu oft einfach *mehr* Aufgaben vom gleichen Typ gestellt. Dass die Kinder auf diese Weise eher ihre Fehlerstrategien stabilisieren als echte Lernfortschritte zu machen, darf dann nicht verwundern.“

Für eine effektive Förderung auf Stufe 2 und 3 müssten speziell ausgebildete Förderlehrer bzw. Tutoren und sorgfältig entwickelte und validierte Fördermaterialien verfügbar sein. Empirisch validierte Förderlehrgänge, wie sie z. B. für den Schriftspracherwerb entwickelt wurden, gibt es in Mathematik nur in Ansätzen (z. B. Reading Recovery, vgl. Wellenreuther 2005, 45 f.).

Dass man durch adaptive Fördermaßnahmen auf den verschiedenen Stufen große Effekte erzielen kann, wird durch die Studie von Fuchs et al. (2008) eindrucksvoll belegt.

### Methoden bei der Aneignung neuer Konzepte und Verfahrensweisen

Präventiver Mathematikunterricht sollte *systematisch* und *explizit* sein (vgl. Gersten et al. 2009, 21 f.). Die Lehrperson sollte

- an Vorwissen anknüpfen und den neu zu lernenden Sachverhalt damit verbinden,

- die neuen Konzepte und Prozeduren explizit vorstellen,

- sie an Lösungsbeispielen

- sowie an Veranschaulichungen erläutern;

- sie sollte Schüler/-innen wiederholt den Sachverhalt erklären lassen und dazu Diskussionen anleiten, und

- sie sollte inhaltlich zu den gefundenen Lösungen Feedback geben.

Die Lehrperson sollte ihre Gedanken laut formulieren, während sie eine Aufgabe löst. Sie sollte ihre Schüler/-innen auffordern, ebenfalls ihre Gedanken beim Problemlösen zu äußern.

### Erklärungen

Die Entwicklung verständlicher Erklärungen und Herleitungen ist eine schwierige Aufgabe, mit der viele Lehrer/-innen überfordert sind. Deshalb wären sie auf gute Erklär-Modelle in Schulbüchern angewiesen. Solche verständlichen Erklärungen müssten im Rahmen von Entwicklungsforschung sorgfältig formuliert und erprobt werden, wie dies in asiatischen Staaten (Japan, China, Singapur) geschieht (vgl. Wellenreuther 2010). Besonders wirksam ist ein systematisches und explizites Unterrichten effizienter Strategien (Tournaki 2003). Durch ein Training, in dem der Trainer die Vorgehensweise Schritt für Schritt vormodellierte, profitierten lernschwache Schüler/-innen am meisten.

### Lösungsbeispiele

Wenn nach einer kurzen Erläuterung eines komplexen neuen Inhalts sofort das Lösen von Aufgaben verlangt wird, dann kann der normale Schüler aufgrund der Überlastung seines Arbeitsgedächtnisses kaum etwas lernen (Clark, Nguyen & Sweller 2006). Eine solche Überlastung kann durch vermehrten Einsatz von Lösungsbeispielen im Unterricht vermieden werden, wobei mit zunehmendem Wissen vom Schüler immer mehr selbstständiges Problemlösen abverlangt werden sollte (vgl. Renkl, Sworm & Hilbert 2004). Dabei sollten während der Entwicklung von Lösungsbeispielen an der Tafel die dahinterstehenden Erklärungen explizit verbalisiert werden. Auch lernschwächere Schüler/-innen können sich zusätzlich in Partnerarbeit abwechselnd erklären, warum bestimmte Schritte eines Lösungsverfahrens sinnvoll sind. Zunehmend sollte von den Schülern verlangt werden, selbst solche Erklärungen zu entwickeln. Erst wenn sie selbst die Dinge in ihrem Zusammenhang verstehen, können sie das neu Gelernte aktiv in ein Wissensnetz in ihrem Langzeitgedächtnis abspeichern. Hingegen wird mechanisch bzw. rezeptartig Gelerntes nicht in dieses Wissensnetz integriert und deshalb kurz nach dem „Lernen“ wieder vergessen.

Aufgrund von Befragungen und Unterrichtsbeobachtungen ist bekannt, dass im deutschen Mathematikunterricht Lösungsbeispiele selten als Lernhilfen systematisch eingesetzt werden (Renkl et al. 2004). Hier sollte die Lehrperson statt einem mindestens vier bis sechs Lösungsbeispiele mit ihren Schülern diskutieren, bevor ein Arbeitsbogen ausgehändigt wird, um Schüler selbstständig Probleme lösen zu lassen. Es sollte beachtet werden, dass der Erklärbedarf in hohem Maße vom Vorwissen und den mathematischen Fähigkeiten der Schüler abhängig ist. Man kann auch eine andere Abfolge von Lösungsbeispielen und Aufgaben verwenden: Dabei lässt man zunächst Lösungsbeispiel 1 analysieren und stellt eine strukturgleiche Aufgabe, danach gibt man Lösungsbeispiel 2 zusammen mit einer strukturgleichen Aufgabe 2 usw. Diese Abfolge hat den Vorteil, dass der Erklärbedarf der Schüler sinkt, weil die jeweiligen Lösungsbeispiele eine Orientierungsgrundlage liefern. Auch hierbei sollte die Lehrperson darauf achten, dass die einzelnen Lösungsschritte mehrfach erklärt werden (vgl. Wellenreuther 2009 b, 18 f.).

Wenn nach der Diskussion von vier Lösungsbeispielen zum selbstständigen Problemlösen übergegangen wird, sollte die Lehrperson prüfen, ob die wesentlichen Punkte von den lernschwächeren Schülern schon hinreichend für ein selbstständiges Problemlösen verstanden wurden. Falls dies nicht der Fall ist, könnte sie diese Schüler an einem Tisch versammeln, um mit ihnen die ersten Aufgaben gemeinsam zu lösen. Die Lehrperson gibt dosierte Hilfen, die gerade ausreichen, um die Lösungsschritte zu finden. Beim Erklären sollten grundlegende Ideen betont werden. Häufig werden Verfahrensweisen im Sinne eines Abarbeitens verschiedener Schritte eingeführt, ohne auf früher gelernte Ideen zurückzugreifen. Solche isolierten Schritte einzuüben gleicht dem Auswendiglernen sinnloser Silben. Sinnvoller erscheinen Erklärungen durch Rückgriff auf schon bekannte Verfahren, z. B. die früher gelernte grundlegende Idee der Multiplikation als fortgesetzte Addition:

$$3(x + 4) = (x+4) + (x+4) + (x+4).$$

Man braucht hier nur bekanntes Wissen auf neue Situationen anzuwenden (vgl. Vendlinski et al. 2008).

### Visualisierungen

Die Belastung des Arbeitsgedächtnisses kann auch durch Integration von textlichen Erläuterungen in eine Visualisierung vermindert werden, statt die Erläuterungen unter die Veranschaulichung als Legende zu schreiben. Auch heuristische Techniken wie das Stabmodell können Schülern helfen, die Belastung des Arbeitsgedächtnisses zu vermindern. Durch Stabmodelle lernen Schüler, wie wesentliche Informationen visualisiert werden können, um dadurch die Gedächtnisbelastung zu vermindern. In Singapur wird vom dritten Schuljahr

an systematisch mit zunehmend komplexeren Stabmodellen gearbeitet (vgl. Hoven und Garelick 2007). Wir haben in Lüneburg einen sechsständigen Lehrgang zum Erlernen verschiedener Stabmodelle in vierten Klassen erprobt. Dabei konnte festgestellt werden, dass in den drei Versuchsklassen die Kompetenz zur Lösung solcher Aufgaben signifikant gesteigert werden konnte, während in den drei Kontrollklassen kein Lernzuwachs festzustellen war (vgl. Vernet 2009). Interessant erscheint, dass die schwächeren und durchschnittlichen Schüler/-innen durch diesen Lehrgang am meisten profitieren konnten.

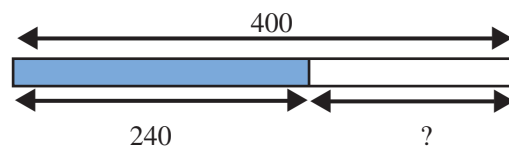
Beispiele fürs Stabmodell:

#### Einfache Aufgabe

##### 1. Aufgabenstellung

Daniel und Simon haben 400 Murmeln.  
Daniel hat 240 Murmeln.  
Wie viele Murmeln hat Simon?

##### 2. Stabmodell



##### 3. Rechnung

$$400 - 240 = 160$$

##### 4. Antwortsatz

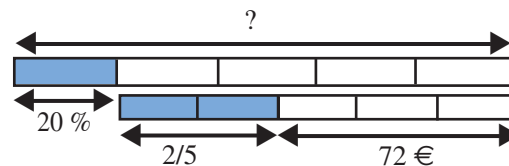
Simon hat 160 Murmeln.

#### Komplexe Aufgabe

##### 1. Aufgabenstellung

Laura gibt 20 % ihres Gelds für Kleidung aus. Vom Rest nimmt sie  $\frac{2}{5}$  für den Kauf eines Buchs. 72 € bleiben übrig.  
Wie viel Geld hatte Laura am Anfang?

##### 2. Stabmodell



##### 3. Rechnung

$$\begin{aligned} \text{unten: } 72 \text{ €} : 3 &= 24 \text{ €} \\ &24 \text{ €} \cdot 5 = 120 \text{ €} \\ \text{oben: } 120 \text{ €} : 4 &= 30 \text{ €} \\ &30 \text{ €} \cdot 5 = 150 \text{ €} \end{aligned}$$

##### 4. Antwortsatz

Laura hatte zu Beginn 150 €.

## Methoden beim Anwenden und beim Transfer

### Vermischte Aufgaben

Die bisher genannten Techniken sollen den Aufbau neuer Konzepte und Verfahrensweisen erleichtern. Nach dem Erwerb neuer Schemata müssen in systematischer Weise Aufgaben verschiedener bekannter Typen gemischt und über einen längeren Zeitraum verteilt Übungen dazu durchgeführt werden. Auch wenn durch Mischung und zeitliche Verteilung solcher Übungen der Lösungsprozentsatz in der Erwerbsphase niedriger sein wird als in der Gruppe, die mit jeweils homogenen Aufgaben gearbeitet hat, wird die Gruppe, die schon frühzeitig mit vermischten Aufgaben zu kämpfen hatte, später deutlich bessere Behaltensleistungen zeigen (vgl. Wellenreuther 2009 b, 36 f.).

### Feedback durch häufige kleine Tests

Während es aufgrund der durchgeführten empirischen Forschung notwendig erscheint, den Erwerb neuer Schemata durch vielfältige Hilfen zu erleichtern (z. B. durch Lösungsbeispiele und Veranschaulichungen), müssen in der Phase der Verankerung des Wissens im Langzeitgedächtnis Techniken zur Anwendung kommen, die den Schülern das Lernen scheinbar erschweren. Statt nochmals Erklärungen und Visualisierungen zu studieren, ist es in dieser Phase lernwirksamer, sich selbst durch offene Fragen zu testen. Die Entwicklung einer Bewusstheit über das eigene Wissen, das durch häufige kleine Tests erzeugt wird, scheint ein Schlüssel zu einem tieferen Verständnis von Inhalten zu sein. Es gibt viele Studien, die belegen, dass kleine formative Tests, die bei schlechtem Ausgang wiederholt werden, zusammen mit anschließendem konkretem inhaltlichem Feedback bei Weitem lernwirksamer sind als nochmaliges gemeinsames Studieren der Inhalte.

### Zusammenfassung

Die Differenzierung zwischen den Methoden, die in verschiedenen Lernphasen zur Anwendung kommen, führte bezüglich der alten Diskussion über die Vor- und Nachteile eines aktiv-entdeckenden Unterrichts zu einem interessanten Ergebnis: Wenn lernschwache Schüler/-innen neue Schemata in einem komplexen inhaltlichen Bereich erwerben sollen, sind sie auf massive Hilfen in Form von systematischen und expliziten Erklärungen anhand von Lösungsbeispielen und Visualisierungen angewiesen. Da ein aktiv-entdeckender Unterricht den Schülern explizite Lösungsmodelle vorenthält und Lehrern verständliches, schrittweise entwickelndes Erklären mit Lösungsbeispielen und Veranschaulichungen verbietet, bleiben „normal“ begabte und lernschwächere Schüler/-innen auf der Strecke. Die relevante experimentelle Forschung zu diesem Thema belegt eindeutig, dass Lernen aktives Operieren im Arbeitsgedächtnis erfordert

und dieses fruchtbare aktive Operieren nur bei geringer Belastung des Arbeitsgedächtnisses möglich ist.

Wenn neue komplexe Verfahren und Konzepte gelernt wurden, müssen Schüler/-innen zusätzlich lernen, wann diese Verfahren angewendet werden können. Sie müssen breite, voneinander differenzierte Schemata entwickeln, um durch sie eine begründete Auswahl unter allen bekannten Verfahrensweisen treffen zu können. Hier helfen z. B. Fehlerdiskussionen. Man muss Übungen dazu zeitlich verteilen und mischen und Übungen zur Erarbeitung der grundlegenden Strukturen durchführen. In dieser Phase ist konkretes inhaltliches Feedback wichtig, auch sollten Schüler/-innen zum offenen Erklären und Verbalisieren des Lösungswegs sowie zur Diskussion verschiedener Lösungswege angeregt werden. Beim Einüben und Verfestigen von Schemata scheinen bestimmte Erschwernisse durchaus produktiv für das Lernen zu sein. Insofern passt hier die Idee des aktiv-entdeckenden Lernens.

### Literatur

- Clark, R., Nguyen, F. & Sweller, J.: Efficiency in Learning. Evidence-based guidelines to manage cognitive load. San Francisco 2006.
- Fuchs, L.S., Fuchs, D., Craddock, C., Hollenbeck, K.N., Hamlet, C.L. & Schatschneider, C.: Effects of Small-Group Tutoring With and Without Validated Classroom Instruction on At-Risk Students' Math Problem Solving: Are Two Tiers of Prevention Better Than One? In: Journal of Educational Psychology 100. 2008, Nr. 3, 491-509.
- Gersten, R., Beckmann, S., Clarke, B., Foegen, A., Marsh, L., Star, J.R., & Witzel, B.: Assisting Students struggling with mathematics: Response to Intervention (RtI) for elementary and middle schools. (NCEE 2009-4060). Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. 2009. (Ist über das Internet frei verfügbar!)
- Grünke, M.: Richtig fördern – aber wie? In: Zeitnah 4. 2007, No 5, 9 f.
- Vom Hofe, R.: Mathematik entdecken. Alte und neue Argumente für entdeckendes Lernen. In: Mathematik lehren 105. 2001, 4-8.
- Hoven, J. und Garelick, B.: „Singapur Math: Simple or Complex?“ In: Educational Leadership 65. 2007, No. 3, 28-31.
- Kirschner, P.A., Sweller, J., Clark, R. E.: Why Minimal Guidance During Instruction Does not Work: An Analysis of the failure of Constructivist, Discovery, Problem-Based, Experimental, and Inquiry-Based Teaching. In: Educational Psychologist 41. 2006, No. 2, 75-86.
- Lorenz, J.H.: Zur Methodologie der Fehleranalyse in der mathematikdidaktischen Forschung – oder: Wieweit sind Rezeptionen der Fehleranalyse fehlerhaft? In: JMD 8. 1987, H. 3, 205-228.
- Reiss, K., Heinze, A., Renkl, A. & Groß, C.: Reasoning and proof in geometry: effects of a learning environment based on heuristic worked-out examples. In: ZDM 40. 2008, Nr. 3, 455-467.
- Renkl, A., Schworm, S. & Hilbert, T. S.: Lernen aus Lösungsbeispielen: Eine effektive, aber kaum genutzte Möglichkeit,

- Unterricht zu gestalten. In: Doll, J. & Prenzel, M. (Hrsg.): Bildungsqualität von Schule. Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsverbesserung. Münster 2004, 77-92.
- Schipper, W.: Sinus-Transfer Grundschule. Mathematik. Modul G 4: Lernschwierigkeiten erkennen – verständnisvolles Lernen fördern. Kiel 2005 (zugänglich über das Internet!).
- Tournaki, N.: The differential effects of teaching addition through strategy instruction versus drill and practice to students with and without learning disabilities. In: Journal of Learning Disabilities 36. 2003, Nr. 5, 449-458.
- Vendlinski, T. P., Howard, K. E., Hemberg, B. C., Vinyard, L., Martel, A., Kyriacou, E., Casper, J., Chai, Y., Phelan, J. C., Baker, E. L.: Using Data and Big Ideas: Teaching Distribution as an Instance of Repeated Addition. CRESST Report 734. 2008.
- Vernet, M.: Möglichkeiten und Grenzen des Stabmodells zur Verdeutlichung mathematischer Zusammenhänge – eine empirische Studie an Grundschulen. Examensarbeit im Lehramtsstudium, Lüneburg 2009.
- Wellenreuther, M.: Zur Methodologie der „Fehleranalyse“ in der mathematikdidaktischen Forschung oder Wieweit sind Fehleranalysen fehlerhafte Analysen? In: JMD 8. 1987, H. 4, 269-303.
- Wellenreuther, M.: Konsequenzen aus Pisa in unterrichtspraktischer Sicht – empirisch geprüfte Modelle des Umgangs mit Heterogenität. Seminar 4. 2005, 34-50.
- Wellenreuther, M.: Individualisieren – aber wie? Individualisiertes Lernen im Spannungsfeld zwischen offenem und lehrergeleitetem Unterricht. In: Schulverwaltung NRW 20. 2009a, 71-74.
- Wellenreuther, M.: Forschungsbasierte Schulpädagogik. Anleitungen zur Nutzung empirischer Forschung für die Schulpraxis. Hohengehren 2009 b.
- Wellenreuther, M.: Schulbücher – eine Lernhilfe für Schüler und Lehrer? In: Schulverwaltung NRW 2010 (im Druck).
- Wittmann, E. C.: Wider die Flut der „bunten Hunde“ und der „grauen Päckchen“: Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In: Wittmann, E. C., Müller, G. N. (Hrsg.): Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 1, Vom Einspluseins zum Einmaleins, Leipzig 1993, 157-171.

**Dr. Martin Wellenreuther**  
 Leuphana Universität Lüneburg  
 wellenreuther@uni.leuphana.de